Zad. 1. Zbuduj kwantyfikatorowe schematy zdań:

1. Każdy prawnik jest uczniem pewnego prawnika.
2. Pewien prawnik nie jest uczniem żadnego prawnika.
3. Nikt nie jest niczyim przyjacielem.
4. Nikt nie przeczytał wszystkich książek.
5. Każdy filozof głosi takie twierdzenie, którego pewien filozof nie uznaje.
6. Zbiór A ma dokładnie jeden element.
7. Zbiór A ma dokładnie trzy elementy.
8. Zbiór A ma przynajmniej dwa elementy.
9. Nie wszystkie elementy zbioru A są elementami zbioru B.

Zapisać również zaprzeczenia tych schematów zdań, ale tak, aby symbol negacji nie pojawił się na początku żadnego z nich.

Zad. 2. Która z poniższych formuł zawiera x jako zmienną wolną?

1. $(\exists x(x > 0) \to (x = 3)) \wedge \forall x \forall y(x < y)$
2. $\forall x(x + 3 = y) \to \exists x(x < y)$
3. $\exists x(x^2 + 2x - 1 = 0) \vee \exists y(x + 1 = y + 2)$

Zad. 3. Podać przykłady funkcji zdaniowych $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ o zakresie zmiennej $x \in \mathbb{R}$ pokazujące, że formuła

$$\exists x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\exists x \varphi(x) \to \exists x \psi(x))$$

nie jest prawem rachunku kwantyfikatorów.

Zad. 4. Oceń wartość logiczną poniższych zdań:

1. $(\forall x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})\, x = 2y$
2. $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})\, x = 2y$
3. $(\exists x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})\, x = 2y$
4. $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists y \in \mathbb{N})\, x = 2y$
5. $(\forall y \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{N})\, x = 2y$
6. $(\exists y \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{N})\, x = 2y$

Zad. 5. Sprawdź intuicyjnie czy podane formuły są tautologiami rachunku predykatów, jeśli nie są, to podaj kontrprzykład.

1. $\neg \forall x \varphi(x) \equiv \exists x \neg \varphi(x)$, $\neg \exists x \varphi(x) \equiv \forall x \neg \varphi(x)$
2. $\forall x \forall y \varphi(x, y) \equiv \forall y \forall x \varphi(x, y)$, $\exists x \exists y \varphi(x, y) \equiv \exists y \exists x \varphi(x, y)$
3. $\exists x \forall y \varphi(x, y) \to \forall x \exists y \varphi(x, y)$, $\forall x \exists y \varphi(x, y) \to \exists x \forall y \varphi(x, y)$
4. $\forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \equiv \forall x \varphi(x) \wedge \forall x \psi(x)$

5. $\exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \equiv \exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x)$
6. $\forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\forall x\varphi(x) \to \forall x\psi(x))$

Zad. 6*. Niech $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Wtedy, jeśli istnieje taka liczba $g \in \mathbb{R}$, że

$$(\forall\epsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(\forall k > n)|a_k - g| < \epsilon$$

to mówimy że g jest granicą ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i piszemy

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g.$$

Wyjaśnij własnymi słowy (postaraj się zrozumieć powyższą definicję) co to znaczy, że liczba g jest granicą ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.