

**Zad. 1.** Dopisać do wyrażenia  $\neg p \rightarrow q \rightarrow q \rightarrow \neg p$  nawiasy tak, by powstały różne tautologie KRZ.

**Zad. 2.** Uzupełnij puste miejsca w wyrażeniu  $\neg(\quad) \vee (\quad)$  tak, aby powstała formuła była tautologią KRZ.

**Zad. 3.** Udowodnij poniższe tezy KRZ, używając metody założeniowej:

- (a)  $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$ ;
- (b)  $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ ;
- (c)  $((p \wedge q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$ ;
- (d)  $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow (q \wedge r))$ ;
- (e)  $p \vee \neg p$ .

**Zad. 4.** Mówimy, że dwa zdania *wykluczają* się, gdy nie są współprawdziwe, tzn. gdy koniunkcja tych zdań jest fałszem. Mówimy, że dwa zdania *dopełniają* się, gdy nie są współfałszywe, tzn. gdy ich alternatywa jest prawdą. Zdania *sprzeczne* to takie, które dopełniają się i wykluczają zarazem. Jeśli dwa zdania, ani się nie dopełniają, ani nie wykluczają, ani żadne z nich nie wynika logicznie z drugiego (w tym kontekście to znaczy, że implikacja w obie strony nie jest tautologią), to wtedy mówimy, że są *logicznie niezależne*. Zbadaj związki logiczne (wykluczanie, dopełnianie, sprzeczność, niezależność logiczna) pomiędzy następującymi parami schematów:

- (a)  $p, \neg p$ ;    (b)  $p \rightarrow q, q \rightarrow p$ ;    (c)  $p, \neg p \wedge q$ ;    (d)  $p \wedge q, p \vee q$ .

**Zad. 5.** Pokaż, że istnieje nieskończenie wiele tautologii KRZ, kontrtautologii KRZ i formuł, które nie są ani tautologiami, ani kontrtautologiami KRZ.

**Zad. 6\*.** Kreska Sheffera zdefiniowana jest wzorem  $p|q = (\neg p \vee \neg q)$ .

- (i) Wyraż alternatywę, implikację oraz równoważność za pomocą koniunkcji i negacji.
- (ii) Wyraż koniunkcję, implikację oraz równoważność za pomocą alternatywy i negacji.
- (iii) Wyraż negację, koniunkcję, implikację, alternatywę oraz równoważność za pomocą kreski Sheffera.

**Zad. 7\*.** Załóżmy, że zbiór wartości logicznych  $L_3 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$  oraz, że funkcje logiczne definiujemy następująco:  $\neg x = 1 - x$ ,  $x \rightarrow y = \min(1, 1 - x + y)$ ,  $x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y = \max(x, y)$ ,  $x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y) = \min(x, y)$ ,  $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) = 1 - |x - y|$ . Sporządź matryce dla tak zdefiniowanych funkcji logicznych. Sprawdź, czy w tej logice zachodzą podstawowe prawa logiczne (np. prawo wyłączonego środka). Co stałoby się, gdyby zbiory wartości logicznych wyglądałyby następująco  $L_n = \{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \dots, 1\}$ , dla  $n \in \mathbb{N}, n > 2$ ?

**Zad. 8.** Na pewnej wyspie mieszka dwóch tubylców. Jeden z nich zawsze mówi prawdę, drugi zawsze kłamie. Na wyspę dostał się wędrowiec, który chciał dotrzeć do stolicy. Stał przed rozwidleniem dróg, przy którym stała ta

dwójka tubylców, jeden przy jednym rozwidleniu, drugi przy drugim. Wędrowiec chciał dowiedzieć się, które z rozwidleń doprowadzi go do stolicy. Może zadać tylko jedno pytanie spotkanym tubylcom. Jak powinien je sformułować? Odpowiedź szczegółowo uzasadnij.

**Zad. 9\*.** Wędrowiec jest na tej samej wyspie i chce się dowiedzieć czy na wyspie jest złoto. Może zadać tylko jedno pytanie przypadkowo spotkanemu tubylcowi. Jaki brzmi to pytanie?

**Zad. 10.** Które z poznanych spójników logicznych są wykorzystywane przez Google jako operatory wyszukiwania? Znajdź te spójniki (np. za pomocą Google) i podaj kilka przekonujących przykładów zastosowań.